حل معادلات PDE بوسیله Matlab

حامد وزوایی

www.iran-eng.com

بهار ۹۰

پس از مدل کردن یک فرایند یا یک تجهیز به معادلاتی میرسیم که معمولا حل آنها از طریق تحلیلی بسیار مشکل یا کلا مقدور نیست بنابراین برای حل اینگونه مسائل که معمولا معادلات مشتقات جزئی هستند بهتر است از روشهای عددی استفاده نمود به نرم افزار matlab چون زبان سطح بالاست کار کردن با آن ساده تر از دیگر زبانهای برنامه نویسی سطح پایین مانندC و فرترن و... هست و همچین رابط گرافیکی GUI باعث میشه که نتایج خروجی در قالب نمودارهای گرافیکی نمایش در بیاد در اینجا با یک مثال ساده از انتقال حرارت شروع میکنم که قابل تعمیم یه دیگر معادلات مانند جرم و مومنتوم میباشد فرض کنید پس از مدل کردن یک تجهیز مثلا یک راکتور به معادله زیر رسیده ایم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که یک معادله انتقال حرارت یک بعدی است و k ضریب انتقال حرارت هدایتی است برای حل ما احتیاج به دو شرط مرزی و یک شرط اولیه داریم که شرایط مرزی را فرضا یه این شکل در مظر میگیریم:

ساده ترین شرایط مرزی شرایط مرزی دریکله است که مقدار عددی متغیر مثلا دما در مرزها تعیین میشه مثلا ما در اینجا دما را در x=0 برر ۱۵ درجه سانتیگراد و در x=end برابر ۲۵ درجه سانتیگراد میگیریم طول قطع را ۱۰ سانتیمتر و تغییرات دما در قطعه را در زمان ۰ تا ٤ ثانیه بدست میاوریم و شرط اولیه را هم به شکل زیر در نظر میگیریم:

```
init = 20 + 5*sin(x)
```

برای حل از چند روش توسط متلب میشود استفاده نمود:

۱. با استفاده از روشهای عددی
۲. Pdetool
۳. تابع pdepe
٤. simulink

www.iran-eng.com

-روش حـــل عـــددی بوســـیله تفاضـــلات متنـــاهیfinite-differences

با استفاده از تعریف روش تفاضلات متناهی معادله بالا به معادله زیر تبدیل میشود:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=k\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

که پس از مرتب کردن بر اساس u_j^{n+1} و $s=k\Delta t/(\Delta x)2$ معادله بالا به معادله زیر تبدیل میشود:

$$u_j^{n+1}=u_j^n+\frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)=s\left(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n\right)+(1-2s)u_j^n$$

که بصورت زیر در متلب وارد میشود:

www.iran-eng.com

```
function u = heat(k, x, t, init, bdry)
% solve the 1D heat equation on the rectangle
described by
% vectors x and t with u(x, t(1)) = init and
Dirichlet boundary
% conditions u(x(1), t) = bdry(1), u(x(end), t)
= bdry(2).

J = length(t);
N = length(x);
dx = mean(diff(x));
dt = mean(diff(t));
s = k*dt/dx^2;

u = zeros(N,J);
```

```
u(1, :) = init;

for n = 1:N-1
u(n+1, 2:J-1) = s*(u(n, 3:J) + u(n, 1:J-2)) +
(1 - 2*s)*u(n, 2:J-1);
u(n+1, 1) = bdry(1);
u(n+1, J) = bdry(2);
end
```

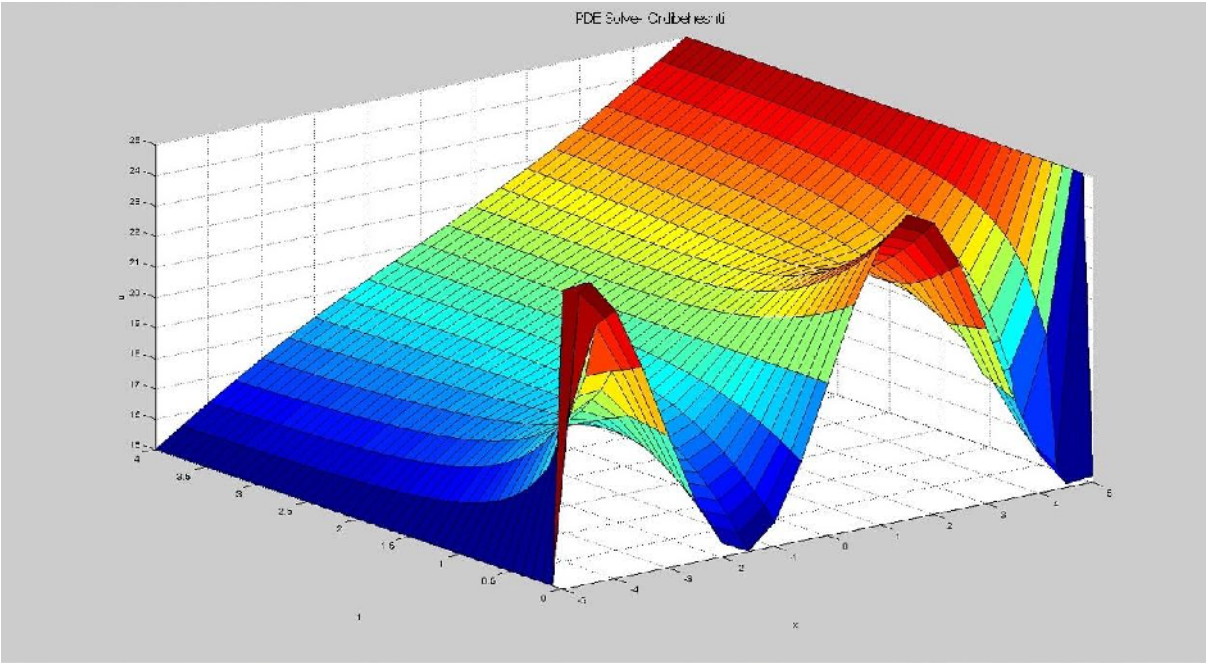
کد بالا را باید در m-file کپی کنید و در دایرکتوری جاری save کنید و هر با که خواستید معادلاتی از این قبیل را حل کنید یا دستور زیر call کنید

```
u = heat(k, x, t, init, bdry)
```

دستورات زیر را انجام دهید تا نتیجه مشاهده شود

```
tvals = linspace(0, 4, 41);
xvals = linspace(-5, 5, 21);
init = 20 + 5*sin(xvals);
uvals = heat(0.02, tvals, xvals, init, [15
25]);
surf(xvals, tvals, uvals)
xlabel x; ylabel t; zlabel u
title('PDE Solve')
```

www.iran-eng.com



همین مساله رو میتوانیم با دستور Pdepe حلش کنیم:

حل معادلات دیفرانسیل پاره ای وابسته به زمان در یک بعد

فرض کنید u تابعی باشد که در معادله زیرصدق کند.

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m} f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad 1$$

و شرایط مرزی آن به صورت زیر باشد.

$$p(x, t, u) + q(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad 2$$

این معادله می تواند معادله حاکم بر انتقال حرارت در یک تیغه , استوانه و یا کره باشد؛ در این صورت f عبارت مربوط به شار انتقال حرارت و s مربوط به تولید یا مصرف انرژی می باشد.

برای خل این معادله از دستور pdepe استفاده می شود.

```
sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan)
```

www.iran-eng.com

m مشخص کننده هندسه مساله است. ۰ برای تیغه، ۱ برای سیلندر و ۲ برای کره

pdefunتابعی که معادله را تعریف می کند:

```
[c,f,s] = pdefun(x,t,u,dudx)
```

c, f, s همان پارامترهای معادله دیفرانسیل پاره ای هستند

icfun تابعی که شرایط اولیه را تعریف می کند:

```
u = icfun(x)
```

bcfunتابعی که شرایط مرزی را بیان می کند:

```
[pl,ql,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
```

اندیس l مربوط , x0 و اندیس r مربوط به xn نقاط ابتدایی و انتهایی بردار (xmesh)

xmesh : برداری شامل نقاط x1 تا xn

tspan : بردار زمان متناظر با بردار xmesh

حالا با استفاده از pdepe می توانیم معادله را حل کنیم

ابتدا معادله رو تعریف میکنیم با توجه به شکل روتین معادلات pde:

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m} f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad 1$$

و معادله اصلی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

www.iran-eng.com

مشخص میشود:

c=1
m=0
f=k*DuDx
s=0

پس:

```
function [c,f,s] = pdex(x,t,u,DuDx)
c = 1;
f = (0.02)*DuDx;% flux is variable conductivity
times u_x
s = 0;
```

حال باید شرایط مرزی و شرط اولیه مشخص شود:

شرایط مرزی:

شکل کلی بصورت زیر است:

$$p(x,t,u) + q(x,t)\, f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad 2$$

پس:

```
function [pl,ql,pr,qr] = pdexbc(xl,ul,xr,ur,t)
% q's are zero since we have Dirichlet
conditions
% pl = 0 at the left, pr = 0 at the right
endpoint
pl = ul-15;
ql = 0;
pr = ur-25;
qr = 0;
```

حال باید شرایط اولیه وارد شود:

```
function u0 = pdexic(x)
% initial condition at t = 0
u0 = 20+5*sin(x);
```

www.i-eng.com

حال دستورات زیر زا اجرا میکنیم:

```
%Solves a sample Dirichlet problem for the heat
equation in a rod,
%this time with variable conductivity, 21 mesh
points
m = 0;  %This simply means geometry is linear.
x = linspace(-5,5,21);
t = linspace(0,4,81);
sol = pdepe(m,@pdex,@pdexic,@pdexbc,x,t);
% Extract the first solution component as u.
u = sol(:,:,1);
% A surface plot is often a good way to study a
solution.
surf(x,t,u)
title('Numerical solution computed with 21 mesh
points in x.')
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('u')
% A solution profile can also be illuminating.
figure
plot(x,u(end,:))
title('Solution at t = 4')
xlabel('x'), ylabel('u(x,4)')
```

www.iran-eng.com

مثال: یک لوله استوانه ای را در نظر بگیرید که از وسط با یک غشا به دو نیم تقسیم شده است.در یک طرف این لوله گاز A با فشار ۱۰ بار و در طرف دیگر گاز B وجود دارد.اگر t=0 غشا پاره شود گاز A در B نفوذ می کند تغییرات فشار جزیی گاز A را در طول لوله حساب کنید.

معادله حاکم بر این سیستم به این شکل است

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad 3$$

Dضـــریب نفـــوذ گـــاز A در B اســـت و معمـــولا از مرتبـــه ۱ e-5اســـت.

شرایط اولیه

$$p(x,0)=\begin{cases}10 & 0\le x\le 0.5\\ 0 & 0.5\le x\le 1\end{cases}$$

و شرایط مرزی

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial p(l,t)}{\partial x}=0$$

با مقایسه معادله۳ با معادله ۱ می بینیم که

m=0
c=1
s=0
f=1e-5*DuDx

پس تابع pdefun به این صورت تعریف می شود.

```
function [c,f,s] = pdefun0(x,t,u,DuDx)
c = 1;
f = 1e-5*DuDx;
s = 0;
```

---

www.iran-eng.com

```
function u0 = pdeic0(x)
if ((x >= 0) & (x <= .5))
u0=10;
elseif ((x >= 0.5) & (x <= 1))
u0=0;
end
```

```
function [pl,ql,pr,qr] = pdebc0(xl,ul,xr,ur,t)
pl = 0;
ql = 100000;
pr = 0;
qr = 100000;
```

مثال:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$$

$$ic: u(x,0) = x$$

$$bc1: u(0,t) = 1$$

$$bc2: u(1,t) = t^2$$

$$0 \le x \le 1$$

$$t \ge 0$$

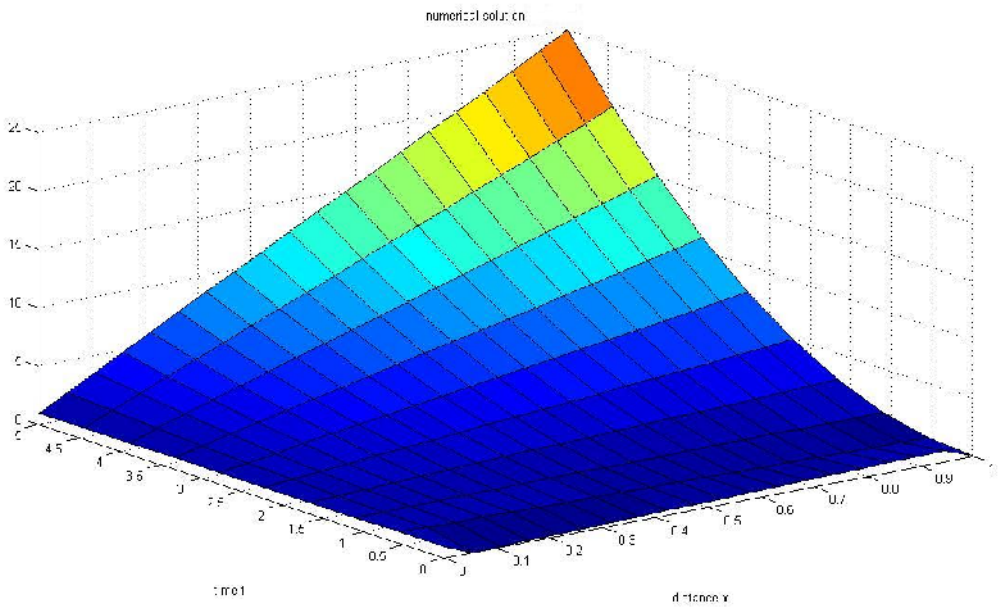
www.irsog.com

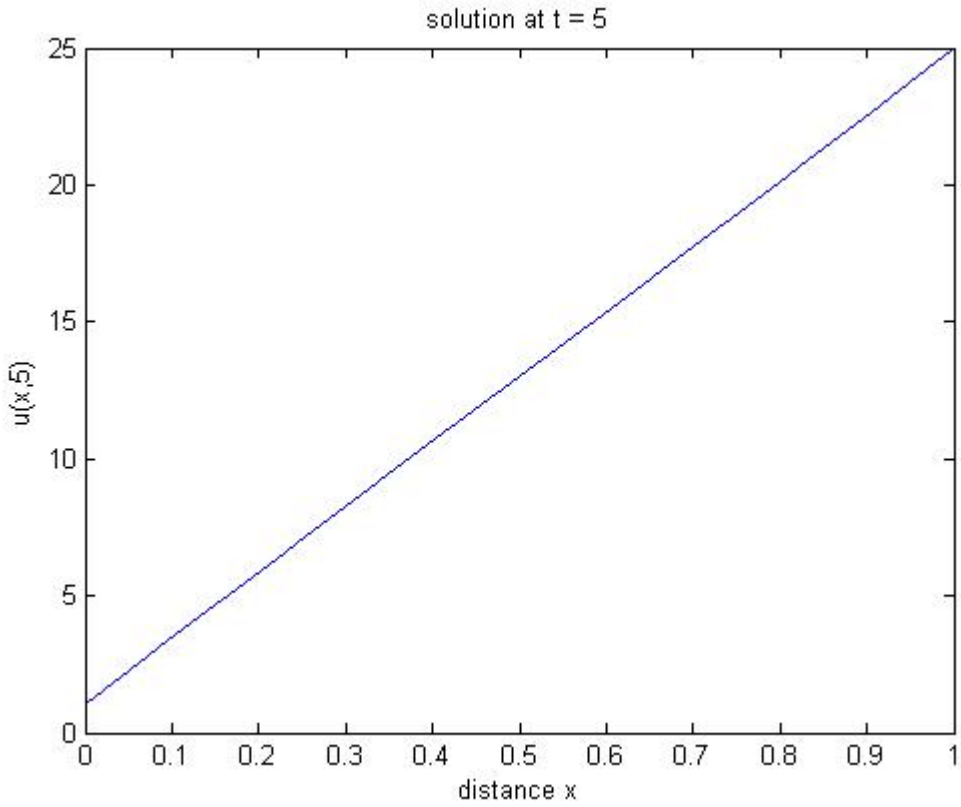
```
function [c,f,s] = pde(x,t,u,DuDx)

c = 1;

f = DuDx;

s = t;
```

```
function u0 = pdeic(x)
u0 = x;



function [pl,ql,pr,qr] = pdebc(xl,ul,xr,ur,t)
pl = ul-1;
ql = 0;
pr = ur-t^2;
qr = 0;



m = 0;
x = linspace(0,1,20);
t = linspace(0,5,10);
sol = pdepe (m,@pde,@pdeic,@pdebc,x,t);
u = sol(:,:,1);
figure(1)
surf(x,t,u)
title ('numerical solution')
xlabel('distance x')
```

www.iran-eng.com

```
ylabel('time t')
figure(2)
plot(x , u(end,:))
title('solution at t = 5')
xlabel('distance x);
ylabel('u(x,5)')
```





مثال:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2tx^2$$

$$ic: u(x,0) = \cos(\frac{3\pi}{2}x)$$

$$bc1: u(0,t) = 1$$

$$bc2: u(1,t) = \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \le x \le 1$$

$$t \ge 0$$

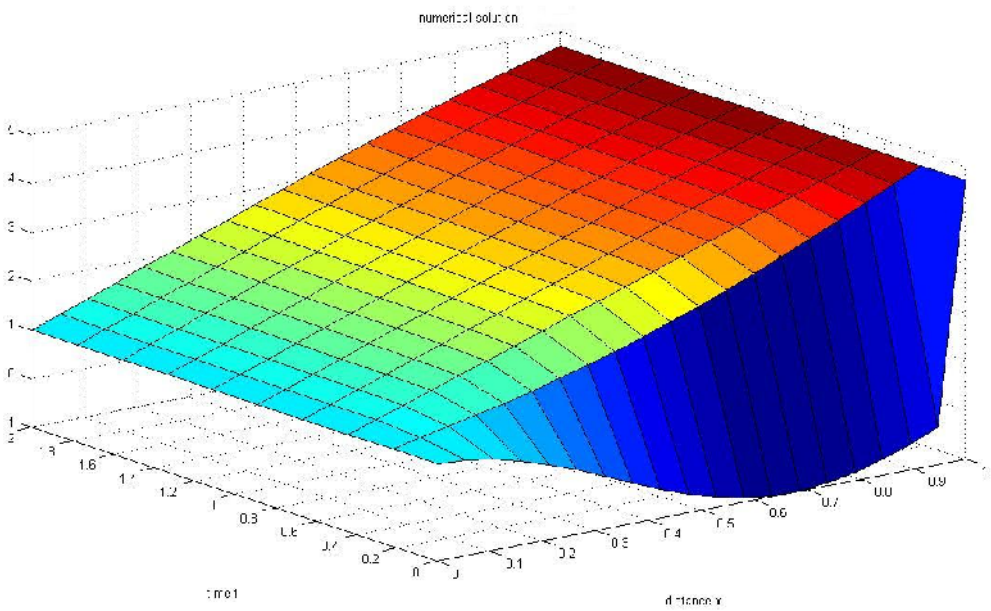
```
function [c,f,s] = pde(x,t,u,DuDx)
```

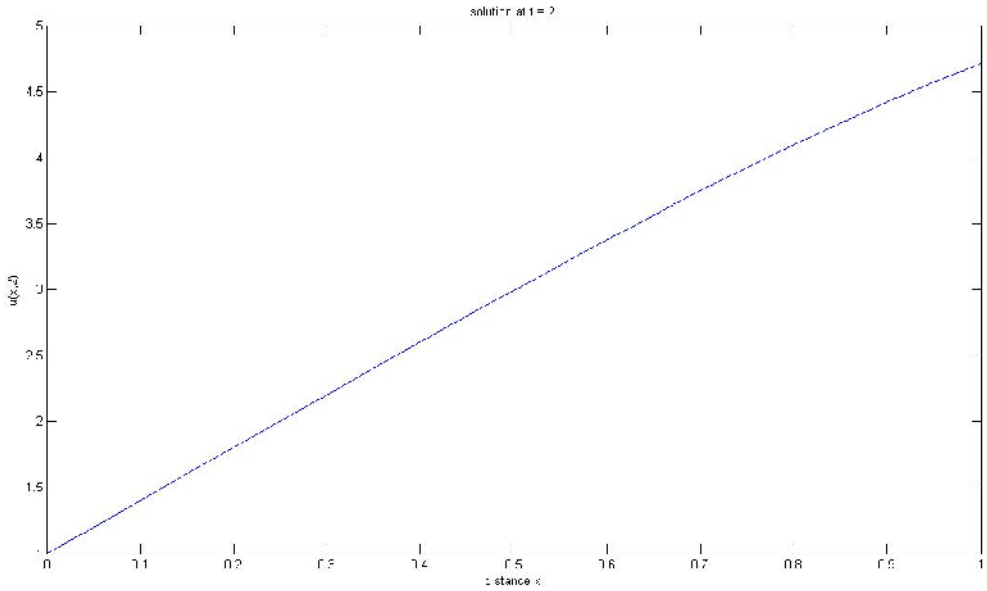
```
c = 1;
f = DuDx;
s = 2* t * x^2;

function u0 = pdeic(x)
u0 = cos (1.5*pi*x);


function [pl,ql,pr,qr] = pdebc(xl,ul,xr,ur,t)
pl = ul-1;
ql = 0;
pr = ur-1.5*pi;
qr = 0;


m = 0;
x = linspace(0,1,20);
t = linspace(0,2,10);
sol = pdepe (m,@pde,@pdeic,@pdebc,x,t);
u = sol(:,:,1);
figure(1)
surf(x,t,u)
```

www.iran-eng.com

```
title ('numerical solution ')
xlabel('distance x')
ylabel('time t')
figure(2)
plot(x , u(end,:))
title('solution at t = 2')
xlabel('distance x);
ylabel('u(x,2)')
```

ng.com





مثال:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - e^{3u} + \sin(u)$$

Ic :

u(r,0)=0

Bcs:

u(1,t)=1

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Solving:

Functions:

www.iranong.co

PDE:

```
function [c,f,s] = mypde2(r,t,u,DuDr)
c = 1;
f = DuDr;
s = -exp(3*u)+sin(u);
```

Ic:

```
function u0 = mypde2ic(r)
u0 = 0;
```

Bcs:

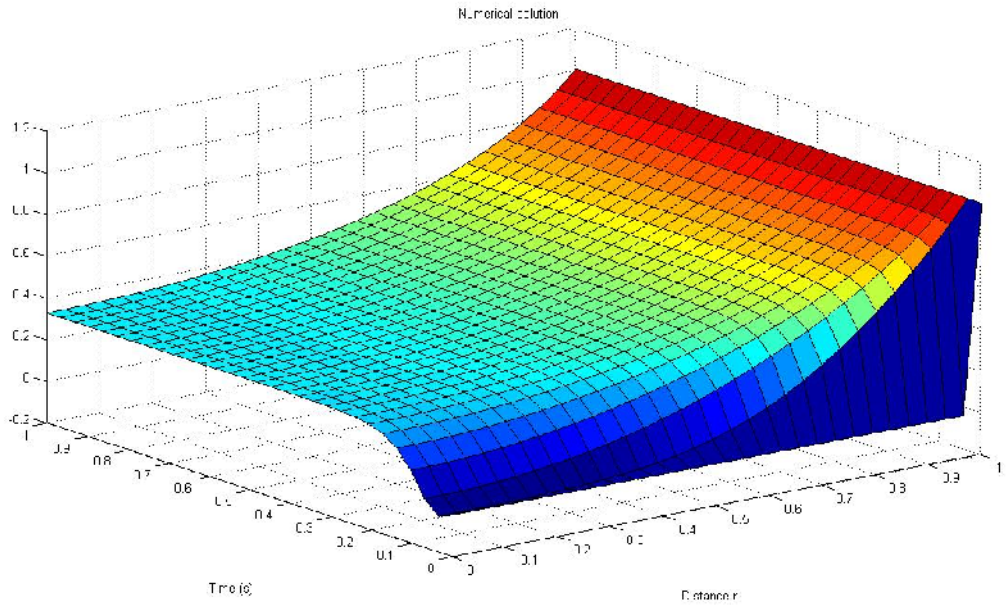
```
function [pl,ql,pr,qr] =
mypde2bc(rl,ul,rr,ur,t)
pl = 0;
ql = 0;
pr = ur-1;
qr = 0;
```

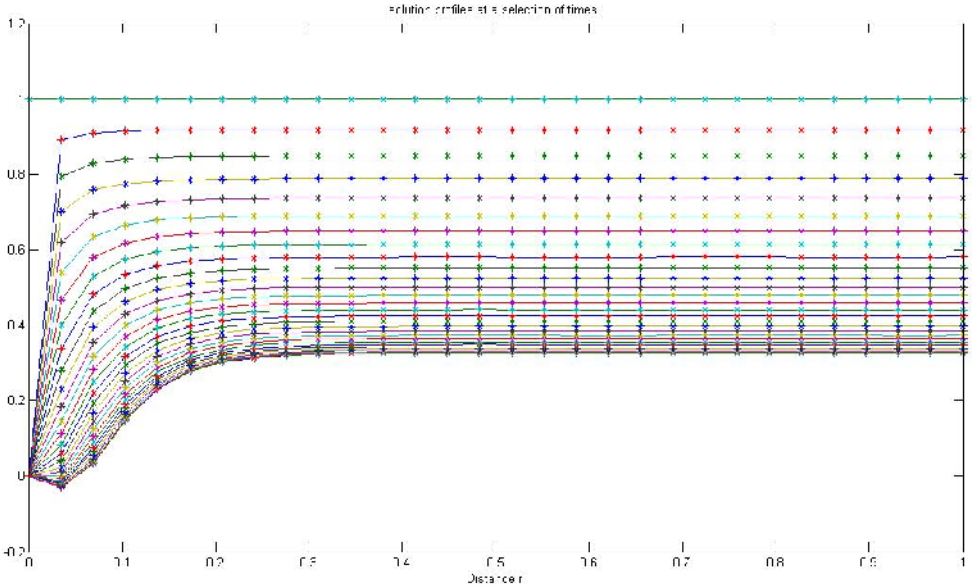
solving:

```
m = 2;
r = linspace(0,1,30);
t = linspace(0,1,30);
sol = pdepe(m,@mypde2,@mypde2ic,@mypde2bc,r,t);
u = sol(:,:,1);
figure(1)
surf(r,t,u)
```

www.iran-eng.com

```
title('Numerical solution')
xlabel('Distance r'),ylabel('Time (s)')
figure(2)
plot(r,u,r,u,'*')
xlabel('Distance r')
title('solution profiles at a selection of times.')
```





www.iran-eng.co